

Разработка программы исследования вероятностных характеристик обнаружителей гармонического сигнала при различной степени априорной неопределенности с использованием библиотеки boost

Э. А. Кирсанов, email: ekir74@mail.ru

Д. А. Гранкин

ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени профессора
Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», (г. Воронеж)

***Аннотация.** Рассматривается программная реализация модуля, позволяющего строить плотности распределения решающих статистик в задаче обнаружения полностью известного гармонического сигнала или гармонического сигнала с неизвестными амплитудой и начальной фазой при условии отсутствия и наличия сигнала, а также наглядно отображать вероятности пропуска сигнала, правильного обнаружения, правильного необнаружения и ложной тревоги при различных значениях отношения сигнал-шум, выполненная на языке программирования C++ с использованием библиотеки boost.*

***Ключевые слова:** гармонический сигнал, обнаружение, решающая статистика.*

Введение

Одной из основных задач теории оптимальных методов радиоприема является задача обнаружения радиосигнала [1-3]. Эффективность ее решения во многом зависит от полноты имеющейся априорной информации о параметрах сигнала и шума. Поэтому представляет интерес разработка программы для исследования вероятностных характеристик обнаружения для простейшего случая гармонического сигнала при различной степени априорной неопределенности.

Целью настоящей работы является рассмотрение особенностей программной реализации модуля, позволяющего строить плотности распределения решающих статистик в задаче обнаружения полностью известного гармонического сигнала или гармонического сигнала с неизвестными амплитудой и начальной фазой при условии отсутствия и наличия сигнала, на языке программирования C++ с использованием библиотеки boost.

1. Постановка и решение задачи

Сначала рассмотрим задачу обнаружения полностью известного гармонического сигнала. Пусть на вход радиоприемного устройства с полосой пропускания (ПП) шириной $\Delta f = f_{\max} - f_{\min}$, где f_{\min} и f_{\max} - минимальная и максимальная границы ПП, поступает входная реализация

$$x(t) = \eta s(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

где η — случайная величина, принимающая лишь значение $\eta = 0$ (гипотеза H_0 : сигнал отсутствует) или $\eta = 1$ (гипотеза H_1 : сигнал присутствует): $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \Phi)$ - гармонический сигнал с известными параметрами: несущей частотой $f_{\min} < f_0 < f_{\max}$, амплитудой A и начальной фазой Φ ; $n(t)$ - белый гауссовский шум с двусторонней спектральной плотностью мощности $N_0/2$. При справедливости гипотезы H_0 отсчеты входной реализации $x[n] = x(n\Delta t)$, $n = \overline{0, N-1}$, взятые с интервалом дискретизации $\Delta t = \frac{1}{2\Delta f}$ будут представлять собой независимые гауссовские

случайные величины с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 = \frac{N_0}{2\Delta t}$.

Обозначим вектор отсчетов как $\mathbf{X} = (x[0], \dots, x[N-1])^T$. При этом логарифм отношения правдоподобия имеет вид [1]

$$\ln \Lambda(\mathbf{X}) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] A \cos(2\pi f_0 n \Delta t + \Phi) - \frac{A^2}{2\sigma^2} \frac{N}{2}, \quad (2)$$

где второе слагаемое не зависит от входной реализации.

Используя известное тригонометрическое выражением для косинуса суммы и осуществив нормировку логарифма отношения правдоподобия, получим решающую статистику в виде

$$T(\mathbf{X}) = \sqrt{\frac{2}{N}} \frac{1}{A\sigma} \left[a \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos(2\pi f_0 n \Delta t) + b \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin(2\pi f_0 n \Delta t) \right], \quad (3)$$

где $a = A \cos(\Phi)$, $b = -A \sin(\Phi)$.

Очевидно, что указанная статистика имеет нормальное распределение. Ее математическое ожидание при справедливости гипотезы H_0 равно нулю $\langle T(\mathbf{X}) / H_0 \rangle = 0$, а при справедливости гипотезы H_1 - отношению сигнал-шум по напряжению

$\langle T(\mathbf{X}) / H_1 \rangle = d = \sqrt{\frac{N}{2}} \frac{A}{\sigma}$, дисперсия при справедливости гипотез H_0 и H_1 равна единице $\langle T^2(\mathbf{X}) / H_0 \rangle = \langle (T(\mathbf{X}) - \langle T(\mathbf{X}) / H_1 \rangle)^2 / H_1 \rangle = 1$.

При решении задачи обнаружения гармонического сигнала с неизвестными амплитудой и начальной фазой логарифм отношения правдоподобия имеет вид [1]

$$\ln \Lambda(\mathbf{X} / \hat{A}, \hat{\Phi}) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \hat{A} \cos(2\pi f_0 n \Delta t + \hat{\Phi}) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{A}^2 \cos^2(2\pi f_0 n \Delta t + \hat{\Phi}), \quad (4)$$

где \hat{A} и $\hat{\Phi}$ - оценки максимального правдоподобия соответственно амплитуды и начальной фазы сигнала.

Найдем оценки \hat{A} и $\hat{\Phi}$. Предварительно запишем

$$\hat{A} \cos(2\pi f_0 n \Delta t + \hat{\Phi}) = \hat{a} \cos(2\pi f_0 n \Delta t) + \hat{b} \sin(2\pi f_0 n \Delta t), \quad (5)$$

где $\hat{a} = \hat{A} \cos(\hat{\Phi})$, $\hat{b} = -\hat{A} \sin(\hat{\Phi})$. При найденных оценках \hat{a} и \hat{b} оценки \hat{A} и $\hat{\Phi}$ примут вид:

$$\hat{A} = \sqrt{\hat{a}^2 + \hat{b}^2}, \quad \hat{\Phi} = \arctg(-\hat{b} / \hat{a}). \quad (6)$$

Оценки максимального правдоподобия \hat{a} и \hat{b} имеют вид [1]

$$\hat{a} = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos(2\pi f_0 n \Delta t), \quad \hat{b} = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin(2\pi f_0 n \Delta t). \quad (7)$$

С учетом этих значений находим

$$\ln \Lambda(\mathbf{X} / \hat{a}, \hat{b}) = \frac{N}{4\sigma^2} (\hat{a}^2 + \hat{b}^2). \quad (8)$$

Осуществим нормировку величин \hat{a} и \hat{b}

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{N}{2}} \hat{a}, \quad \hat{\beta} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{N}{2}} \hat{b}. \quad (9)$$

Тогда правило обнаружения имеет вид

$$T(\mathbf{X}) = \hat{\alpha}^2 + \hat{\beta}^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \gamma', \quad (10)$$

где $\hat{\alpha} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos(2\pi f_0 n \Delta t)$, $\hat{\beta} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin(2\pi f_0 n \Delta t)$.

При справедливости гипотезы H_0 математические ожидания величин $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ равны нулю $\langle \hat{\alpha} / H_0 \rangle = \langle \hat{\beta} / H_0 \rangle = 0$, а при справедливости гипотезы H_1

$$\langle \hat{\alpha} / H_1 \rangle = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{N}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} A \cos(2\pi f_0 n \Delta t + \Phi) \cos(2\pi f_0 n \Delta t) \approx \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{N}{2}} A \cos(\Phi),$$

$$\langle \hat{\beta} / H_1 \rangle = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{N}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} A \cos(2\pi f_0 n \Delta t + \Phi) \sin(2\pi f_0 n \Delta t) \approx -\frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{N}{2}} A \sin(\Phi).$$

Дисперсии величин $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ при справедливости гипотез H_0 и H_1 равны единице $\langle \hat{\alpha}^2 / H_0 \rangle = \langle \hat{\beta}^2 / H_0 \rangle = 1$,

$$\langle (\hat{\alpha} - \langle \hat{\alpha} / H_1 \rangle)^2 / H_1 \rangle = \langle (\hat{\beta} - \langle \hat{\beta} / H_1 \rangle)^2 / H_1 \rangle = 1.$$

Тогда решающая статистика $T(\mathbf{X})$ имеет хи-квадрат распределение с двумя степенями свободы (центральное при справедливости гипотезы H_0 и нецентральное с параметром нецентральности $d^2 = \frac{N}{2} \frac{A^2}{\sigma^2}$ при справедливости гипотезы H_1).

2. Программная реализация модуля исследования вероятностных характеристик обнаружителей гармонического сигнала

Для исследования вероятностных характеристик обнаружителей гармонического сигнала при различной степени априорной неопределенности в визуальной, объектно-ориентированной среде программирования Embarcadero C++Builder 10.2 с использованием библиотеки boost была разработана соответствующая программа.

Библиотека boost обеспечивает возможность работы с различными законами распределения. Фрагмент кода программы, поясняющего процесс задания порога обнаружения и вычисления соответствующих ему значений вероятностей пропуска сигнала, правильного обнаружения и правильного необнаружения приведен в листинге 1.

Листинг 1

Задание порога и вероятностных характеристик обнаружения

```
#include <boost/math/distributions/normal.hpp>
#include <boost/math/distributions/chi_squared.hpp>
#include
<boost/math/distributions/non_central_chi_squared.hpp>

double q=3; // отношение сигнал-шум по напряжению
```

```

int Wno=1; // вид неопределенности (1-полностью известный
сигнал, 2-сигнал с неизвестными амплитудой и начальной фазой)
double Plt=0.01; // вероятность ложной тревоги

using namespace boost::math;
normal_distribution<> myNormal0(0,1);
chi_squared_distribution<> myChisquared0(2);

if(Wno==1) // полностью известный сигнал
{
    normal_distribution<> myNormal1(q,1);
    // вычисление порога обнаружения
    Zob=quantile(myNormal0,1-Plt);
    // вычисление вероятности пропуска сигнала
    Pps=cdf(myNormal1,Zob);
    // вычисление вероятности правильного обнаружения
    Ppo=1-cdf(myNormal1,Zob);
    // вычисление вероятности правильного необнаружения
    Ppn=cdf(myNormal0,Zob);
}
else if(Wno==2) // сигнал с неизв. ампл. и нач. фазой
{
    non_central_chi_squared_distribution<>
myNoncentralChisquared1(2,q*q);
    // вычисление порога обнаружения
    Zob=quantile(myChisquared0,1-Plt);
    // вычисление вероятности пропуска сигнала
    if(Zob==0&&q==0)
        Pps=0;
    else
        Pps=cdf(myNoncentralChisquared1,Zob);
    // вычисление вероятности правильного обнаружения
    if(Zob==0&&q==0)
        Ppo=1;
    else
        Ppo=1-cdf(myNoncentralChisquared1,Zob);
    // вычисление вероятности правильного необнаружения
    if(Zob==0)
        Ppn=0;
    else
        Ppn=cdf(myChisquared0,Zob);
}
}

```

При первом запуске открывается главное окно программы и отображаются гауссовские плотности распределения решающей статистики в задаче обнаружения полностью известного гармонического сигнала при отношении сигнал-шум по напряжению 3 (рисунок 1). При этом красным цветом показана плотность распределения решающей статистики для случая справедливости гипотезы H_0 (сигнала нет), а зеленым цветом показана плотность распределения решающей

статистики для случая справедливости гипотезы H_1 (сигнал есть). Отображаемый синей линией порог обнаружения соответствует заданному значению вероятности ложной тревоги 0.01. В программе предусмотрена возможность изменения значения порога обнаружения оператором соответствующим ползунком или по принципу «захватить и перетащить», реализованному в соответствии с [4].

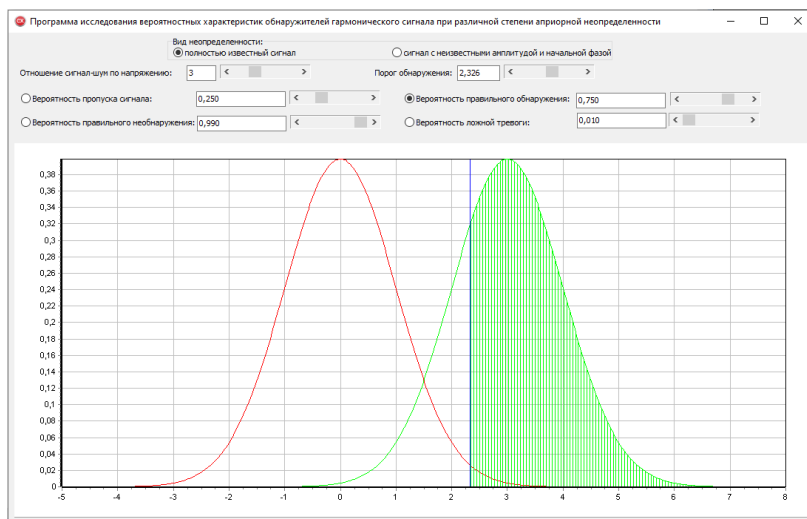


Рис. 1. Первый запуск программы (заштрихована вероятность правильного обнаружения)

Расположенные в верхней части главного окна программы радиокнопки позволяют выбирать штрихуемые площади под кривыми плотностей распределения, соответствующие вероятностям пропуска сигнала, правильного обнаружения, правильного необнаружения и ложной тревоги. Значения этих вероятностей отображаются в соответствующих полях. Менять значение отношения сигнал-шум по напряжению можно соответствующим ползунком, расположенным в верхней части главного окна программы. При этом если отношение сигнал-шум уменьшается, то плотность распределения решающей статистики для случая справедливости гипотезы H_1 смещается влево, сливаясь при нулевом значении отношения сигнал-шум с плотностью распределения решающей статистики для случая справедливости гипотезы H_0 . В этом случае вероятность правильного обнаружения становится равной вероятности ложной тревоги. При увеличении

значения отношения сигнал-шум плотность распределения решающей статистики для случая справедливости гипотезы H_1 смещается вправо.

Изменение вида неопределенности (полностью известный сигнал или сигнал с неизвестными амплитудой и начальной фазой) осуществляется с использованием расположенных в верхней части главного окна программы радиокнопок. Если выбрать сигнал с неизвестными амплитудой и начальной фазой, то отображаются плотности хи-квадрат распределения решающей статистики с двумя степенями свободы в задаче обнаружения гармонического сигнала с неизвестными амплитудой и начальной фазой (рисунок 2).

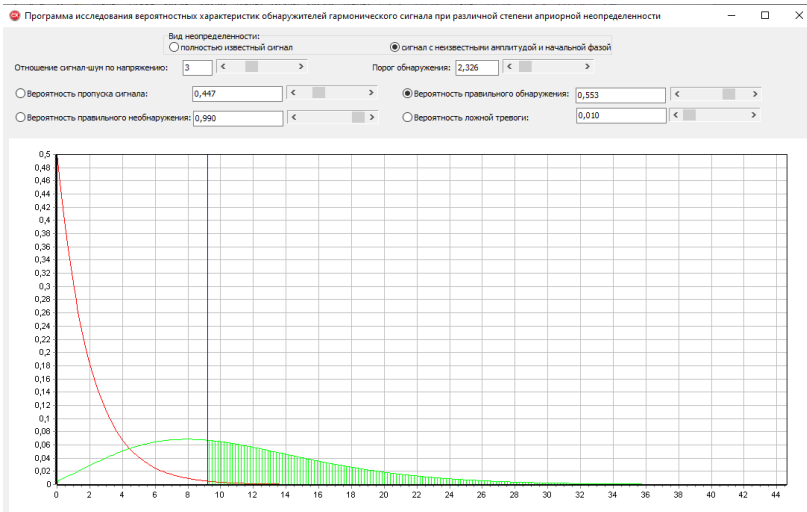


Рис. 2. Вид главного окна программы при изменении вида неопределенности (для сигнала с неизвестными амплитудой и начальной фазой)

3. Заключение

Анализ полученных результатов свидетельствует о возможности программной реализации модуля исследования вероятностных характеристик обнаружителей гармонического сигнала при различной степени априорной неопределенности с использованием библиотеки boost. Программа позволяет рассчитать кривые обнаружения, представляющие собой зависимости вероятности правильного обнаружения от отношения сигнал-шум при фиксированном значении вероятности ложной тревоги, для полностью известного гармонического

сигнала или гармонического сигнала с неизвестными амплитудой и начальной фазой.

Список литературы

1. Шахтарин, Б. И. Обнаружение сигналов / Б. И. Шахтарин. – М. : Горячая линия-Телеком, 2015. – 464 с.
2. Тихонов, В. И. Оптимальный прием сигналов / В.И. Тихонов. – М. : Радио и связь, 1983. – 320 с.
3. Перов, А. И. Статистическая теория радиотехнических систем / А.И. Перов. – М. : Радиотехника, 2003. – 400 с.
4. Теллес, М. Borland C++ Builder. Библиотека программиста / М. Теллес. – СПб. : Питер, 1998. – 512 с.